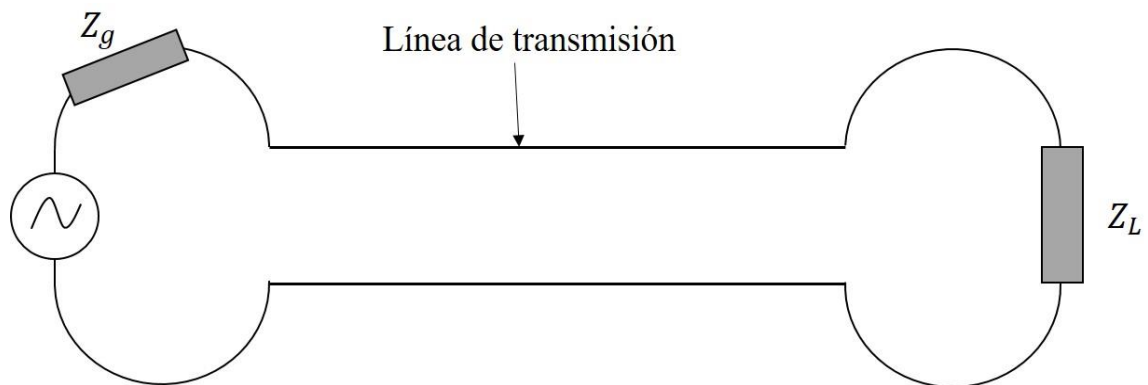


# TEMA 5.

## LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

### 1. Introducción

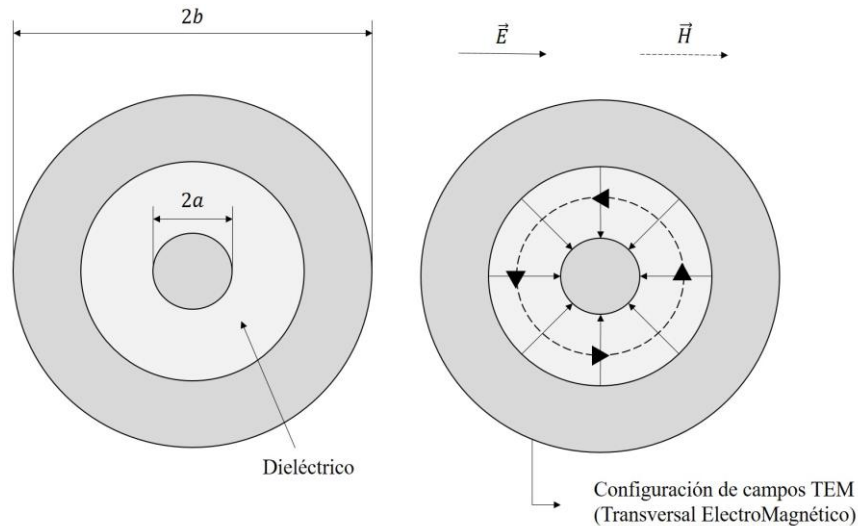
Consideramos una línea de transmisión uniforme que consiste en dos conductores perfectos rectos y paralelos. La distancia de separación entre los conductores es pequeña en comparación con la longitud de onda de la señal que se propaga.



Las líneas de transmisión difieren de los circuitos eléctricos ordinarios en un aspecto fundamental: las dimensiones físicas de los circuitos eléctricos son mucho más pequeñas que la longitud de onda, pero las líneas de transmisión normalmente son una fracción considerable de una longitud de onda e incluso su longitud puede ser de varias longitudes de onda. Por lo tanto, una línea de transmisión es una red de parámetros distribuidos, donde los voltajes y las corrientes varían en magnitud y fase a lo largo de ella.

## 2. Línea coaxial

Tal como se mostró en la figura anterior, una línea de transmisión se representa como una línea de dos hilos, ya que una línea de transmisión (para una propagación TEM) siempre tiene al menos dos conductores. Un ejemplo común de línea de transmisión es la línea coaxial, cuya sección transversal se muestra en la siguiente figura:



Por simetría, los campos TEM serán independientes de  $\phi$ , y el operador Laplaciano transversal viene dado por la expresión:

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \quad (2.1)$$

Tendremos que resolver la ecuación  $\nabla_t^2 \Phi = 0$  con las condiciones:  $\Phi(a) = 0$ ,  $\Phi(b) = V_0$ ,  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$ ,  $r \neq 0$  ya que el dieléctrico está situado entre  $r = a$  y  $r = b$   $\rightarrow$   $\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \rightarrow r \frac{d\Phi}{dr} = k_1 \rightarrow \Phi = k_1 \ln r + k_2$

Utilizando las condiciones de contorno, se obtiene:

$$\Phi(r) = V_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \quad (2.2)$$

entonces

$$\vec{E}_t = -\nabla_t \Phi \cdot e^{j(\omega t - kz)} = -\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\hat{r}}{r} e^{j(\omega t - kz)} \quad (2.3)$$

donde hemos supuesto propagación a lo largo de +OZ

$$\vec{H}_t = \frac{I_0}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot e^{j(\omega t - kz)}; \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} \quad (\text{número de onda}) \quad (2.4)$$

$$\vec{H}_t = \frac{-V_0/Z_{TEM}}{\ln(b/a)} \frac{\hat{\phi}}{r} \cdot e^{j(\omega t - kz)} \quad (2.5)$$

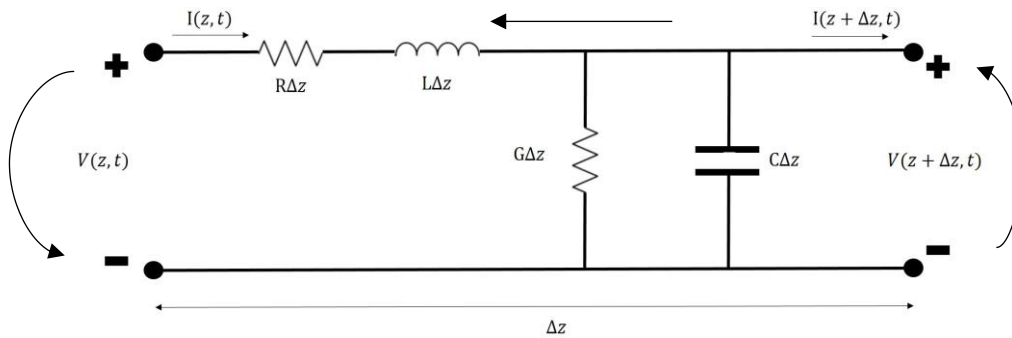
$$Z_{TEM} = \frac{\eta_v}{\sqrt{\epsilon_r}}; \quad \eta_v = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$$

### 3. Modelo circuital de parámetros distribuidos

Consideramos una longitud diferencial  $\Delta z$  de una línea de transmisión



La longitud diferencial  $\Delta z$  puede ser modelizada por el siguiente circuito equivalente:



$R \rightarrow$  resistencia por unidad de longitud (ambos conductores) ( $\Omega/m$ )

$L \rightarrow$  inductancia por unidad de longitud (ambos conductores) ( $H/m$ )

$G \rightarrow$  conductancia por unidad de longitud ( $S/m$ )

$C \rightarrow$  capacidad por unidad de longitud ( $F/m$ )

$L$  representa la inductancia mutua entre los dos conductores.

$C$  es la capacidad entre conductores separados por dieléctrico.

$R$  representa la resistencia debida a la conductividad finita de los conductores.

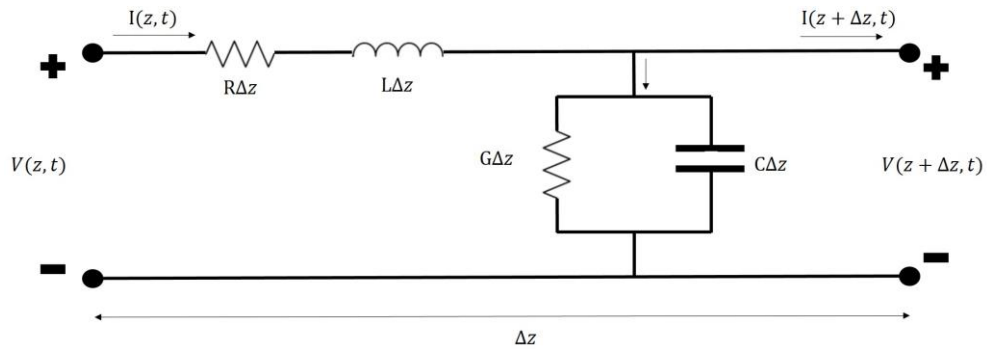
$G$  representa las pérdidas dieléctricas en el material entre conductores.

Para variaciones temporales de tipo armónico,  $e^{j\omega t}$ , las ecuaciones de Kirchoff toman la forma:

*mallas*

$$-V(z + \Delta z, t) - I(z, t)(R + j\omega L)\Delta z + V(z, t) = 0 \quad (3.1)$$

*nudos*



$$I(z, t) = I(z + \Delta z, t) + V(z + \Delta z, t)(G + j\omega C)\Delta z \quad (3.2)$$

Si  $\Delta z \rightarrow 0$ , las ecuaciones se transforman en:

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -(R + j\omega L)I(z, t) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -(G + j\omega C)V(z, t) \quad (3.4)$$

donde se ha tenido en cuenta

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} \\ \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{I(z + \Delta z, t) - I(z, t)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (3.5)$$

derivando ambas ecuaciones con respecto a  $z$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} &= -(R + j\omega L) \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z, t) \\ \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial z^2} &= -(G + j\omega C) \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)I(z, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vemos que tanto  $V(z, t)$  como  $I(z, t)$  verifican la misma ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución general es

$$V(z, t) = A \cdot e^{j\omega t - \gamma z} + B e^{j\omega t + \gamma z} \quad (3.7)$$

donde  $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$

La corriente de modo, se puede calcular a través de la ecuación

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -(R + j\omega L)I(z, t), \quad (3.8)$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} I(z, t) &= \frac{\gamma}{R + j\omega L} A e^{j\omega t - \gamma z} - \frac{\gamma}{R + j\omega L} B e^{j\omega t + \gamma z} \\ &= \frac{A}{Z_0} e^{j\omega t - \gamma z} - \frac{B}{Z_0} e^{j\omega t + \gamma z} \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$  es la impedancia característica ( $\Omega$ ).

Si consideramos bajas pérdidas,  $\alpha \ll \beta \rightarrow R \ll \omega L; G \ll \omega C$ . Con lo que la expresión de la impedancia característica será

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\Omega) \quad (3.10)$$

Para una estructura determinada, es posible calcular los valores de  $R, L, G, C$  y deducir de ellos  $\alpha, \beta$  y  $Z_0$ .

Para el caso sin pérdidas

$$\begin{aligned} R_0 = 0, G = 0 \rightarrow \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \sqrt{j\omega L \cdot j\omega C} \\ &= \sqrt{-\omega^2 LC} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{velocidad de fase})$$

#### 4. Capacidad e inductancia por unidad de longitud para un cable coaxial sin pérdidas

Suponemos que los dos conductores tienen la misma carga, pero en oposición de polaridad y que están sometidos a una diferencia de potencial  $V_0$ :

$$\frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}\epsilon \int_v E^2 dv = \frac{1}{2}\epsilon \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{r^2} r dr d\phi dz \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} V_0^2 \rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \text{ (F/m)} \quad (4.2)$$

de igual modo, para calcular la energía magnética (los dos conductores llevando corrientes iguales y opuestas)

$$\frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \int_v H^2 dv = \frac{1}{2}\mu_0 \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{I_0^2}{(2\pi)^2} \frac{r}{r^2} dr d\phi dz = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} I_0^2 \ln(b/a) \quad (4.3)$$

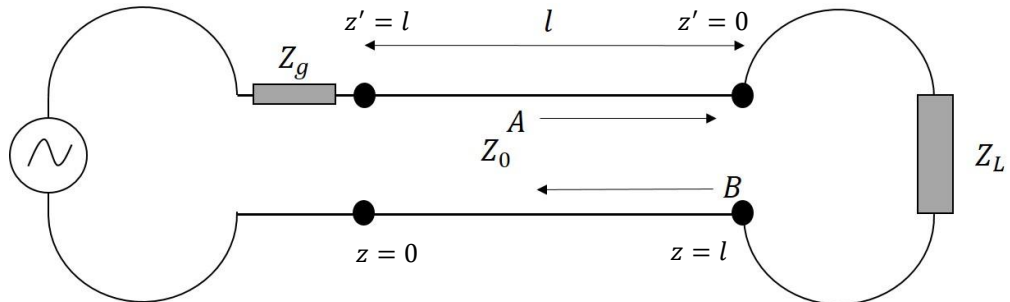
Con lo que

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a) \text{ (H/m)} \quad (4.4)$$

Por lo tanto, sustituyendo  $\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon} = k$

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.5)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \quad (4.6)$$

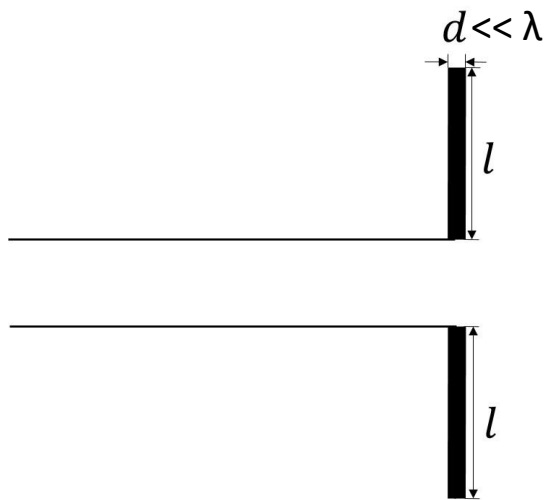


Coeficiente de reflexión:  $\rho = \frac{B \cdot e^{\gamma l}}{A \cdot e^{-\gamma l}} = |\rho| \cdot e^{j\phi}$

Si  $Z_0 \neq Z_L$  la carga está desadaptada y aparecerá una onda reflejada  $\rightarrow$  aparecen ondas estacionarias  $\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$  ( $0 \leq |\rho| \leq 1$ ).

### 5. Distribución de corriente en un dipolo con alimentación central

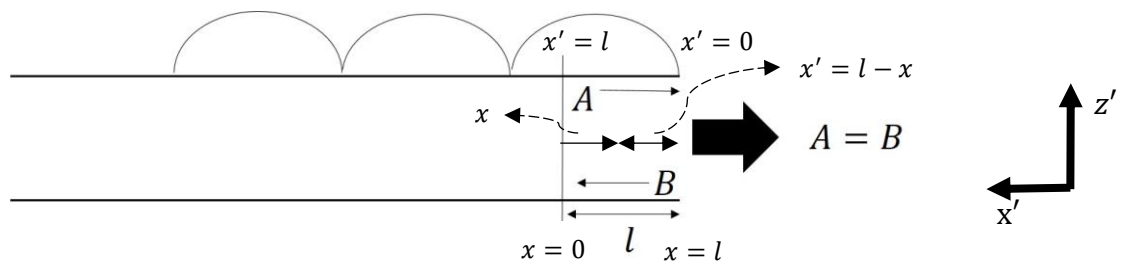
La teoría de líneas de transmisión es de utilidad para estimar la distribución de corriente en un dipolo alimentado centralmente. Dicho modelo de dipolo consiste en un par de conductores tubulares de diámetro  $d$  alineados en "tándem" de tal forma que hay un hueco en el centro.



La longitud total es  $2L \gg d$ . Se aplica un voltaje a través del hueco y aparece una distribución de corriente sobre el par de conductores tubulares que origina un campo radiante.

Consideremos una línea de transmisión en abierto  $\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ ; circuito abierto

$$(Z_L = \infty) \rightarrow |\rho| = \left| \frac{1 - Z_0/Z_L}{1 + Z_0/Z_L} \right| = 1 \rightarrow A = B$$



Si la distancia entre conductores permanece constante, la terminación en abierto produce una distribución de corriente de onda estacionaria dirigida en oposición en los

dos conductores y prácticamente no se produce radiación. La distribución de corriente, para el caso anterior, puede calcularse utilizando la corriente de modo en una línea de transmisión

$$I(x, t) = \frac{A}{Z_0} e^{j\omega t - \gamma x} - \frac{B}{Z_0} e^{j\omega t + \gamma x} \quad (5.1)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (5.2)$$

en el caso sin pérdidas  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = j\beta = jk$ , con lo cual

$$I(x, t) = \frac{A}{Z_0} e^{j(\omega t - kx)} - \frac{B}{Z_0} e^{j(\omega t + kx)} \quad (5.3)$$

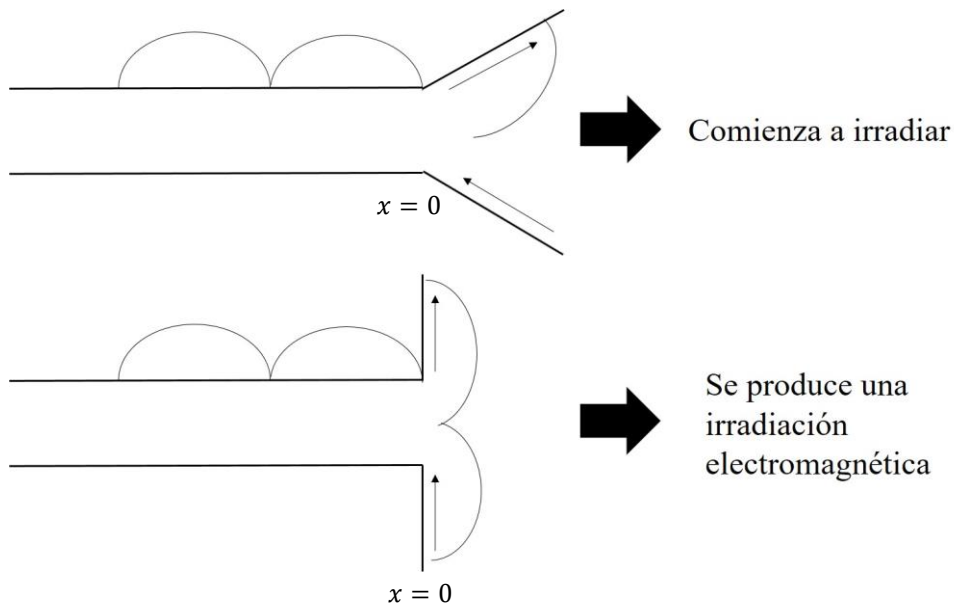
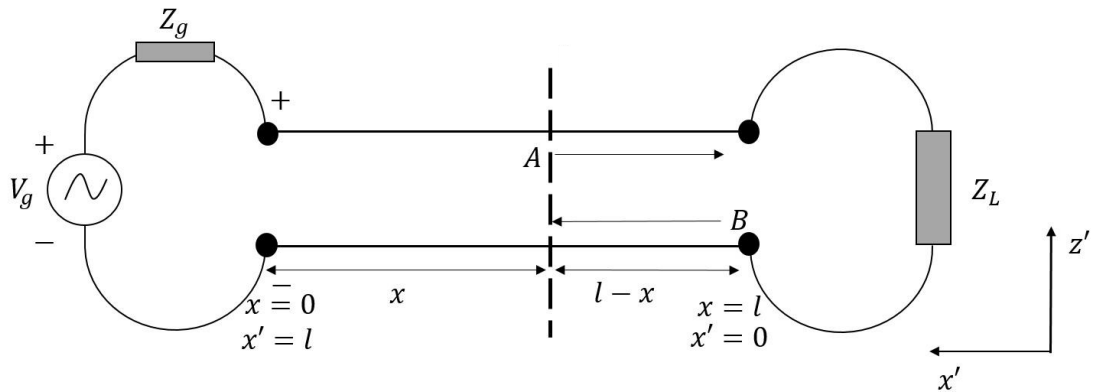
además como la línea está acabada en abierto  $B = A$  y se ha tomado el origen del eje  $x$  a una distancia  $l$  del final de la línea de transmisión

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \frac{A}{Z_0} e^{j(\omega t - k(l-x))} - \frac{A}{Z_0} e^{j(\omega t + k(l-x))} \\ &= \frac{A}{Z_0} e^{j\omega t} \cdot [e^{-jk(l-x)} - e^{jk(l-x)}] \\ &= -\frac{2Aj}{Z_0} e^{j\omega t} \cdot \text{sen}[k(l-x)] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Con una abertura de  $45^\circ$ , la inductancia por unidad de longitud y la capacidad por unidad de longitud cambian con la posición a lo largo del segmento inclinado y, por lo tanto, también cambiará la impedancia característica  $Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Sin embargo, en primer orden, el número de onda  $k$  es constante e igual al valor en el espacio libre. Esto mismo se asume cuando la abertura es de  $180^\circ$  y el dipolo genera una radiación electromagnética.

Por lo tanto, solo variará el valor máximo de la corriente estacionaria con una distribución espacial de tipo sinusoidal y no afectará a la forma del diagrama de radiación (estamos suponiendo que la distribución de corriente no se ve fuertemente afectada por la inclinación de los segmentos extremos de la línea).

$$I(x, t) = I_m \text{sen}[k(l-x)] e^{j\omega t} \quad (5.5)$$



## 6. Coeficiente de reflexión

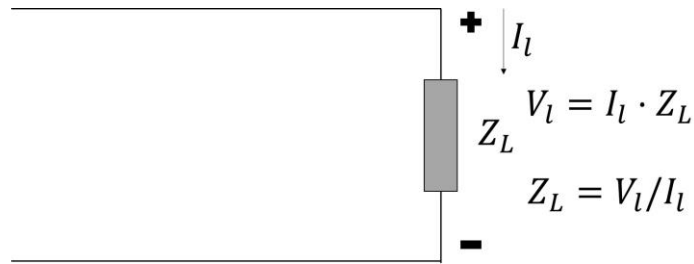
Como se ha definido previamente en la sección 4, el coeficiente de reflexión viene determinado por  $\rho = \frac{Be^{\gamma l}}{Ae^{-\gamma l}}$  (Relación entre la onda reflejada e incidente en el extremo de una línea de longitud  $l$ ).

$\rho = |\rho|e^{j\phi}$  magnitud y ángulo de fase.

Para  $x = l$ , tenemos  $Be^{\gamma l} = \rho Ae^{-\gamma l}$

$$V(l) = V_l = Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l} = Ae^{-\gamma l} + \rho Ae^{-\gamma l} = Ae^{-\gamma l}(1 + \rho) \quad (6.1)$$

$$I(l) = I_l = \frac{A}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{B}{Z_0} e^{\gamma l} = \frac{A}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{\rho}{Z_0} Ae^{-\gamma l} = \frac{A}{Z_0} e^{-\gamma l}(1 - \rho) \quad (6.2)$$



Con lo cual,  $Z_L = \frac{V_l}{I_l} = Z_0 \frac{1+\rho}{1-\rho} \rightarrow \rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$  ( $0 \leq |\rho| \leq 1$ ) sin dimensiones

Para una línea adaptada,  $Z_L = Z_0 \rightarrow |\rho| = 0$  y no existe onda reflejada.

## 7. Relación de tensión en la onda estacionaria

Cuando una línea de transmisión termina en una impedancia arbitraria  $Z_L \neq Z_0$  aparecen una onda incidente y una reflejada en la misma. Siendo A y B sus respectivas amplitudes, el máximo se produce cuando en algún punto de la línea las dos amplitudes están en fase, y el mínimo se produce en el punto en el que se presenta un desfase entre ellas de  $180^\circ$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} |V_{max}| &= A + B = A(1 + B/A) \\ |V_{min}| &= A - B = A(1 - B/A) \end{aligned} \quad (7.1)$$

La relación de tensión en la onda estacionaria (razón de onda estacionaria, VSWR  $\rightarrow$  *Voltage Standing Wave Ratio*)

$$S = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \frac{1 + B/A}{1 - B/A} \quad (7.2)$$

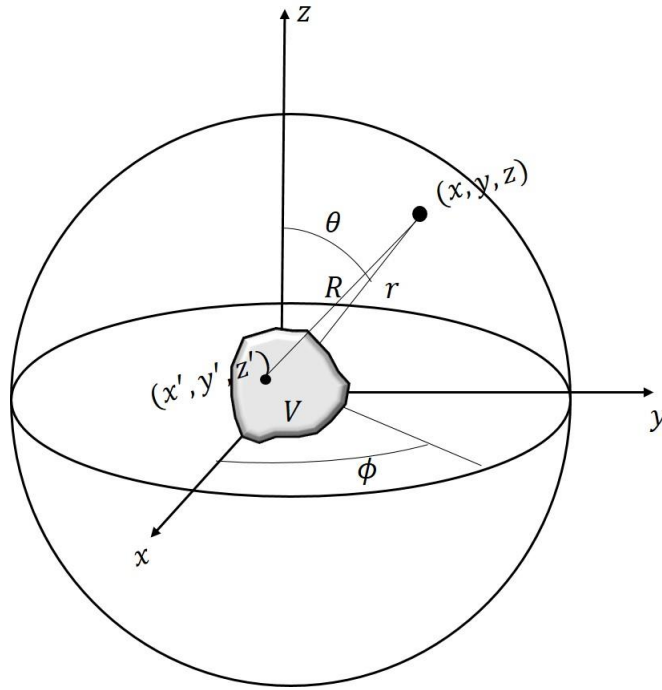
Como  $|\rho| = B/A$ , se obtiene

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (\text{sin dimensiones}) \quad (7.3)$$

$$1 \leq S \leq \infty; \quad 0 \leq |\rho| \leq 1$$

## 8. Expresiones de campo lejano para antenas

En los problemas relacionados con antenas, estamos interesados en determinar los campos en puntos situados a grandes distancias, con respecto a las fuentes. Esto introduce varias simplificaciones en las relaciones campo/fuente.



Consideramos que las fuentes oscilan armónicamente con el tiempo a una frecuencia angular  $\omega$ , y que están confinadas en un volumen finito  $V$ .

Queremos calcular  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en el punto  $(x, y, z)$ , situado lejos de las fuentes:  $R \gg \max[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2]^{1/2}$ , con lo cual la máxima dimensión del volumen  $V$  que contiene todas las fuentes, es muy pequeño comparado con la distancia de cualquier punto fuente al punto campo.

Como  $(x, y, z)$  está situado fuera del volumen  $V$ , mediante las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\vec{B} & \nabla \times \vec{B} &= \frac{j\omega}{c^2}\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

$\vec{B}$  puede relacionarse con las fuentes, a través de la ecuación:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (8.2)$$

en donde

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \int_v \frac{\vec{J}(x', y', z') \cdot e^{j(\omega t - kR)}}{4\pi\mu_0^{-1}R} dv \quad (8.3)$$

con  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  siendo el número de onda y  $R$  la distancia del punto fuente  $(x', y', z')$  al punto campo  $(x, y, z)$ .

De las ecuaciones (8.1) y (8.2), la expresión del campo  $E$  para un punto campo sería:

$$\vec{E} = \left( c^2 / j\omega \right) \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (8.4)$$

Por esta razón, no es necesario calcular  $\Phi$ . La distribución de la carga, en la antena, no se necesita para el cálculo de los campos lejanos; el conocimiento de la distribución de corriente será suficiente.

Procedimiento de cálculo de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ :

1. Cálculo de  $\vec{A}$ , a través de la ecuación:

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \int_v \frac{\vec{J}(x', y', z') \cdot e^{j(\omega t - kR)}}{4\pi\mu_0^{-1}R} dv \quad (8.5)$$

2. Cálculo de  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (8.6)$$

3. Cálculo de  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = \left( c^2 / j\omega \right) \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (8.7)$$

La distancia entre el punto fuente y el punto campo es:

$$\begin{aligned} R &= [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(r \text{sen}\theta \cos\phi - x')^2 + (r \text{sen}\theta \text{sen}\phi - y')^2 + (r \cos\theta - z')^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [r^2 - 2r(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z' \cos\theta) + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= r - (x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z' \cos\theta) + \Theta(r^{-1}) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Para la obtención del último término, se ha hecho una expansión binomial.

Sustituyendo este valor de  $R$ , en la expresión de  $\vec{A}$  (despreciando términos en  $\Theta(r^{-2})$ ):

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi\mu_0^{-1}r} \int_v \vec{J}(x', y', z') e^{jk\mathcal{L}} dv \quad (8.9)$$

en donde  $\mathcal{L} = x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z' \cos\theta$ .

$\mathcal{L}$  puede interpretarse como el producto escalar de:

1. El vector posición desde el origen al punto fuente  $(x', y', z')$ .
2. El vector unitario desde el origen al punto campo  $(x, y, z)$ .

La ecuación (8.9) puede interpretarse como que  $\vec{A}(x, y, z, t)$  está expresado mediante el producto de una onda esférica:

$$\frac{e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi\mu_0^{-1}r} \quad (8.10)$$

y la función direccionalmente ponderada:

$$\vec{a}(\theta, \phi) = \int_v \vec{J}(x', y', z') e^{jkL} dx' dy' dz' \quad (8.11)$$

La potencia radiada por esta antena, dada por la función  $\vec{\mathcal{P}}(\theta, \phi)$   $W/m^2$ , puede calcularse en términos de la función  $\vec{a}(\theta, \phi)$ .

El patrón de radiación, en potencia, dado por la función  $\vec{\mathcal{P}}(\theta, \phi)$  puede expresarse en términos de esta función ponderada  $a(\theta, \phi)$  de la siguiente manera:

$$\vec{E} = \left( \frac{c^2}{j\omega} \right) \nabla \times \nabla \times \vec{A} = j\omega \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}) = -j\omega \vec{A}_T \quad (8.12)$$

$$\vec{H} = \mu_0^{-1} B = \mu_0^{-1} (\nabla \times \vec{A}) = - \left( \frac{j\omega}{\eta} \right) \hat{r} \times \vec{A} = \left( \frac{1}{\eta} \right) \hat{r} \times \vec{E} \quad (8.13)$$

donde solamente nos quedamos con los términos en  $r^{-1}$ .

La parte transversal de  $\vec{A}$  es  $\vec{A}_T = A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$ . De las ecuaciones anteriores se puede concluir que los campos radiados  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son enteramente transversales, que  $\vec{E}$  solamente difiere de  $\vec{A}_T$  por una constante multiplicativa, que  $\vec{H}$  es perpendicular a  $\vec{E}$  y que:

$$\left| \frac{E}{H} \right| = \eta, \quad \eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377 \Omega \quad (8.14)$$

El vector complejo de Poynting nos proporciona la densidad de potencia promedio:

$$\vec{\mathcal{P}}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \hat{r} \left[ \frac{k^2 \eta}{(4\pi r^2)} \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} a_\theta a_\theta^* + \frac{1}{2} a_\phi a_\phi^* \right] \quad (8.15)$$

Al patrón de radiación asociado con  $E_\theta$  se le denomina patrón  $\theta$ -polarizado (o patrón polarizado verticalmente) y al asociado con  $E_\phi$  patrón  $\phi$ -polarizado (o patrón polarizado horizontalmente). De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\mathcal{P}_{r,\theta}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{k^2 \eta}{(4\pi r)^2} \right] |a_\theta(\theta, \phi)|^2 \quad (8.16)$$

$$\mathcal{P}_{r,\phi}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{k^2 \eta}{(4\pi r)^2} \right] |a_\phi(\theta, \phi)|^2 \quad (8.17)$$

Como estamos interesados solamente en las densidades de potencia relativas radiadas en las direcciones  $(\theta, \phi)$  podemos suprimir el factor  $\frac{1}{2} \left[ \frac{k^2 \eta}{(4\pi r)^2} \right]$ .

Tomando en consideración

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}\end{aligned}\quad (8.18)$$

se obtienen las componentes transversales de  $a(\theta, \phi)$ :

$$a_\theta(\theta, \phi) = \int_v [\cos\theta\cos\phi J_x(x', y', z') + \cos\theta\sin\phi J_y(x', y', z') - \sin\theta J_z(x', y', z')] e^{jkL} dx' dy' dz' \quad (8.19)$$

$$a_\phi(\theta, \phi) = \int_v [-\sin\phi J_x(x', y', z') + \cos\phi J_y(x', y', z')] e^{jkL} dx' dy' dz' \quad (8.20)$$

### Resumen:

1. Cálculo de  $a_\theta(\theta, \phi)$  y  $a_\phi(\theta, \phi)$  una vez conocidas las distribuciones de corriente
2. Si estamos interesados en el patrón de potencia en campo lejano,  $|a_\theta(\theta, \phi)|^2$  y  $|a_\phi(\theta, \phi)|^2$  nos dan las potencias relativas polarizadas horizontal y verticalmente.
3. Calculamos los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  a través de las expresiones:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A}_T; \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{r} \times \vec{E}$$

## 9. Propiedades radiantes de un dipolo

Mediante el uso de las expresiones (8.19) y (8.20), además de la distribución de corriente correspondiente (5.5), obtenemos las potencias relativas de un dipolo filiforme con una longitud  $2l$  y alimentación central:

$$a_\theta(\theta) = -I_m \sin\theta \int_{-l}^l \sin[k(l - |z'|)] e^{jkz' \cos\theta} dz' \quad (9.1)$$

$$a_\phi(\theta, \phi) = 0 \quad (9.2)$$

Como la distribución de corriente es simétrica en torno a  $z' = 0$

$$a_{\theta}(\theta) = -2 I_m \operatorname{sen} \theta \int_0^l \operatorname{sen}[k(l - |z'|)] \cos(kz' \cos \theta) dz' \quad (9.3)$$

Integrando se obtiene que

$$a_{\theta}(\theta) = -\frac{2 I_m}{k \operatorname{sen} \theta} [\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)] \quad (9.4)$$

Ahora pasaremos a realizar un estudio del dipolo  $\lambda/2$  (i.e.,  $2l = \lambda/2$ ).

### Dipolo de media longitud de onda

$$2l = \lambda/2 \rightarrow a_{\theta}(\theta) = -\frac{2 I_m}{k} \cdot \frac{[\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)]}{\operatorname{sen} \theta}$$

Teniendo en cuenta el factor de onda esférica  $\frac{e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi\mu_0^{-1}r}$

y utilizando las fórmulas precedentes:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A}_T; \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{r} \times \vec{E}$$

se obtiene

$$E_{\theta}(\theta) = j 60 I_m \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \left[ \frac{\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \theta\right]}{\operatorname{sen} \theta} \right] \quad (9.5)$$

$$H_{\phi}(\theta) = j \frac{I_m}{2\pi} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \left[ \frac{\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \theta\right]}{\operatorname{sen} \theta} \right] \quad (9.6)$$

El patrón en polares de  $E_{\theta}(\theta)/E_{\theta}(\pi/2)$  se muestra en la figura 2.4. El patrón 3D resulta de rotar la figura anterior alrededor del eje OZ ( $E_{\theta}$  no depende de  $\phi$ ), con un cero

a lo largo de los ejes  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 180^\circ$ . Este tipo de patrón tiene aplicaciones (omnidireccionales) en las cuales se requiere una polarización vertical y en las que se puede tolerar en cero en una dirección.

El patrón en potencia puede calcularse utilizando la ecuación

$$\mathcal{P}_{r,\theta}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{k^2 \eta}{(4\pi r)^2} \right] |a_\theta(\theta, \phi)|^2 \quad (9.7)$$

obteniéndose:

$$\mathcal{P}_{r,\theta}(\theta, \phi) = \frac{2\eta I_m^2}{(4\pi r)^2} \left[ \frac{\cos^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta \right]}{\sin^2 \theta} \right] \quad (9.8)$$

La potencia total irradiada es:

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{P}_{r,\theta}(\theta, \phi) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^\pi \mathcal{P}_{r,\theta}(\theta) 2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{\eta I_m^2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta \right]}{\sin \theta} \, d\theta \end{aligned} \quad (9.9)$$

Integrando numéricamente se obtiene

$$P_{rad} = 0.609 \frac{\eta I_m^2}{2\pi} \quad (9.10)$$

La directividad máxima de un dipolo  $\lambda/2$  es

$$D = \frac{\mathcal{P}_{r,\theta}(\pi/2)}{P_{rad}/4\pi r^2} = 1.64 \quad (9.11)$$

$$D = \frac{\mathcal{P}_{max}(\theta_0, \phi_0)}{\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\theta', \phi') r^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'} = 1.64 \quad (9.12)$$

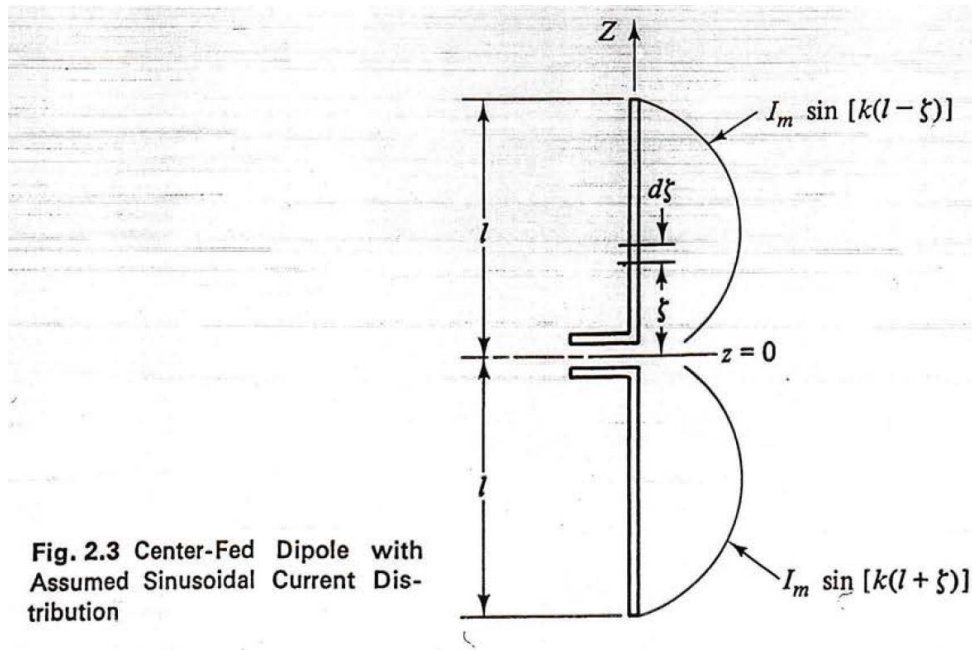
$2l = \lambda/2 \rightarrow l = \lambda/4 \rightarrow$  El pico de corriente de entrada en el dipolo ( $z' = 0$ ) es  $I_m$  y la línea de transmisión de alimentación está entregando al dipolo la potencia:

$$\frac{1}{2} I_m^2 R_{rad} = 0.609 \frac{\eta I_m^2}{2\pi} \quad (9.13)$$

a una resistencia  $R_{rad}$ . Esta resistencia recibe el nombre de resistencia de radiación y para este caso tiene el valor de:

$$R_{rad} = 0.609 \frac{\eta}{\pi} = 73\Omega \quad (9.14)$$

Nótese que no tenemos información sobre la reactancia del dipolo (fase entre el voltaje y la corriente al final de la línea de alimentación). Para poder obtener información acerca de la reactancia necesitaríamos conocer de forma más precisa la distribución de corrientes en el dipolo para calcular su impedancia de entrada, y esta impedancia será una función de la longitud  $2l$  y del diámetro  $d$  del dipolo. Sin embargo, para  $2l \approx \lambda/2$  y  $2l \gg d$ , la parte real de la impedancia es próxima a  $73\Omega$ .



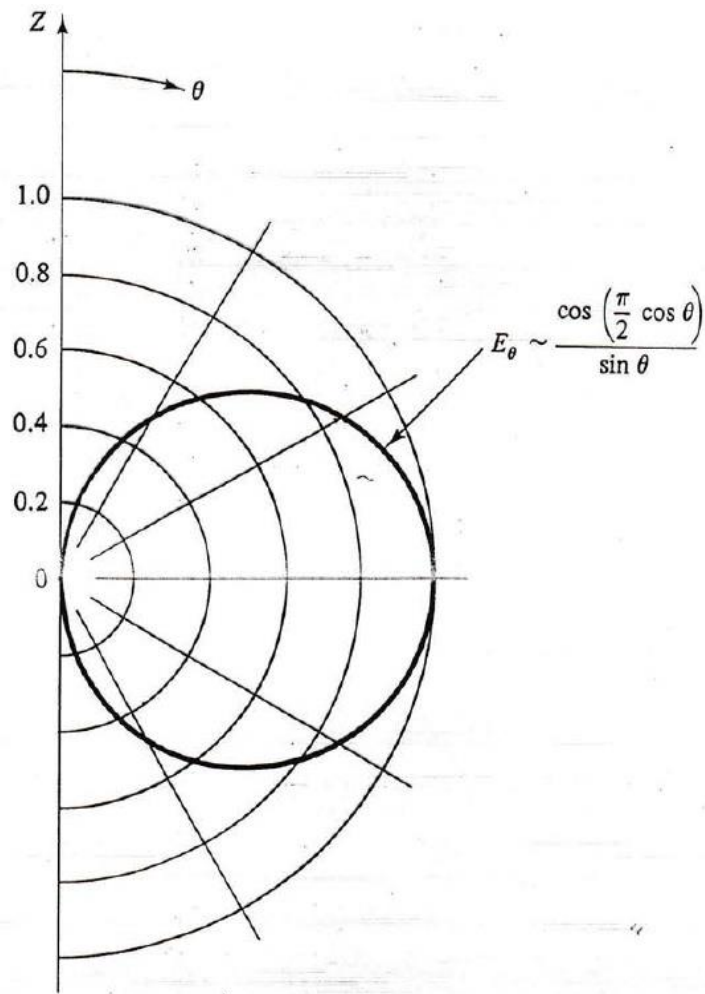


Fig. 2.4 Normalized E-Field Pattern of a Half-Wavelength Center-Fed Dipole

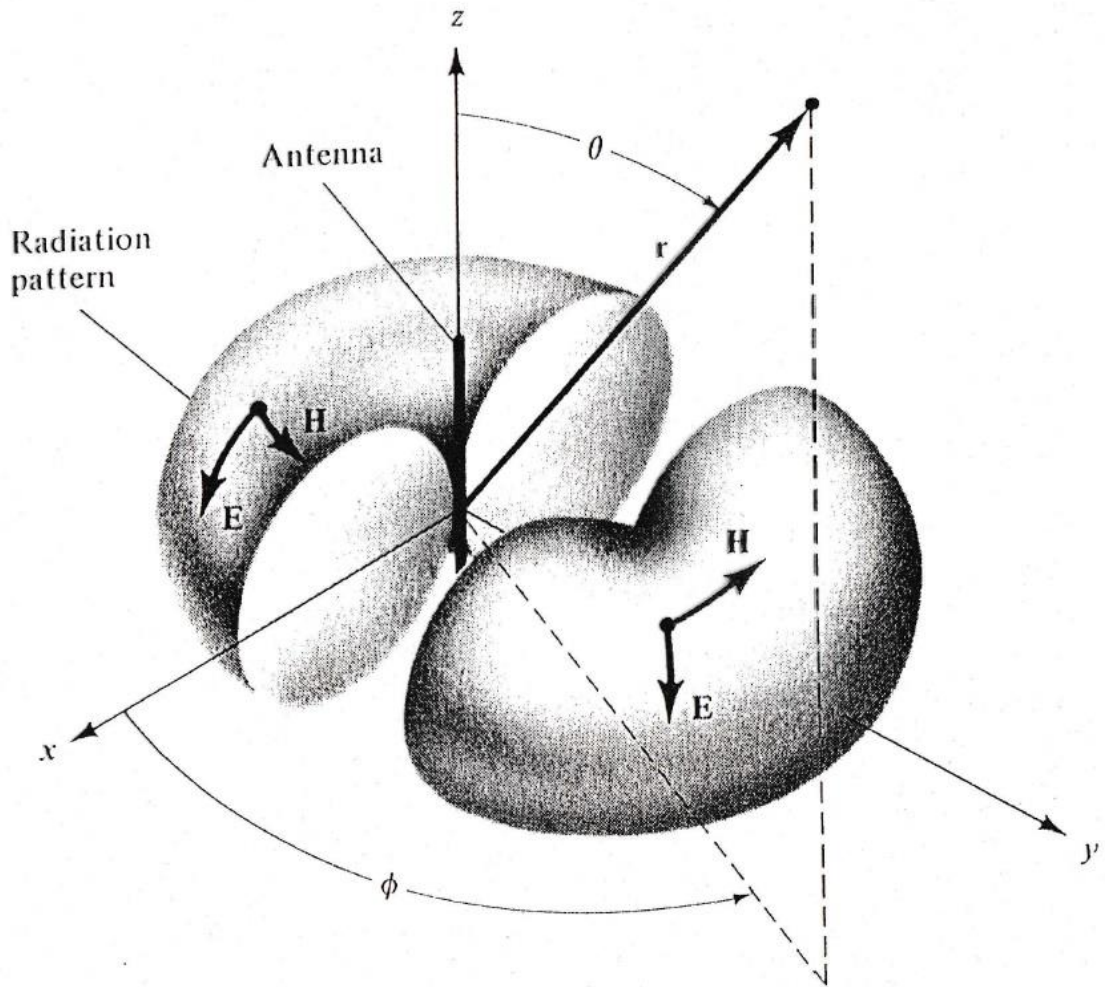


Figure 2.2 Directional (omnidirectional) antenna pattern.